Herrn Prof. Dr. H[illegible]

DE

THEOREMATE QUODAM

CIRCA

FUNCTIONES ABELIANAS.

DISSERTATIO MATHEMATICA

QUAM

SCRIPSIT ATQUE EX AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN ACADEMIA FRIDERICIANA HALENSI

CUM VITEBERGENSI CONSOCIATA

AD FACULTATEM DOCENDI RITE IMPETRANDAM

UNA CUM SENTENTIIS CONTROVERSIS

DIE XV. M. OCTOBRIS A. MDCCCLXIII. HORA XI

PUBLICE DEFENDET

GUSTAVUS ROCH

PHIL. DR.

SOCIO AD RESPONDENDUM ADSUMPTO

HUGONE WOLFF PHIL. STUD.

ADVERSARIORUM PARTES SUSCEPERUNT

HERMANNUS HANKEL PHIL. DR. GUILIELMUS DE ZAHN PHIL. DR.

LIPSIENSES.

LIPSIAE

TYPIS B. G. TEUBNERI.

DE

THEOREMATE QUODAM

CIRCA

FUNCTIONES ABELIANAS.

INTRODUCTIO.

Illustrissimus Riemannus praeceptor mihi carissimus, cuius summa teneor veneratione, in tractatu praeclarissimo de functionibus Abelianis, quem in volumine 54 diarii Crelliani typis expressum deposuit, illas transcendentes methodo plane singulari tractavit.

In hac dissertatione significationes ill. Riemanni tanquam notae sumuntur.

Si s functio algebraica est illius z, $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})$ vero aequatio inter utramque quantitatem locum obtinens.

Tum integralia functionum algebraicarum illius z veluti s diramata, quae pro quoque z finita permanent, secundum § IV dissertationis*) Riemannianae per p illorum lineariter coefficientibus constantibus exprimi possunt.

Significamus haec integralia per w et repraesentamus ea (cf. § IX diss. Riem.) per

$$w = \int \frac{\varphi \, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Secundum § IV diss. Riemanni erit

$$w = a_1 w_1 + \ldots + a_p w_p + \text{Const.}$$

si $w_1 \ldots w_p$ significant integralia a se invicem lineariter non pendentia.

Haec aequatio identica est sequenti

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + \ldots + a_p \varphi_p,$$

---

*) Adnotatio. Hoc nomine semper illam Riemanni dissertationem intelligi volumus quae in Diarii Crelliani vol. 54 reperitur.

*

si

$$w_\mu = \int \frac{\varphi_\mu \, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Ex his functionibus φ Riemannus nonnullas prae ceteris exhibuit, quarum radices quadratae ab eo functiones Abelianae nominantur (cf. § I huius dissertationis). Sunt autem functionum φ eae, quae in $p-1$ punctis planitiei T infinite parvae secundi ordinis fiunt.

E. g. sit

$$s^2 . z . (1-z)(1-\varkappa z) - (1-\lambda z)(1-\mu z) = 0$$

aequatio algebraica vero $F(s, z) = 0$; tum $z = 0, 1, \frac{1}{\varkappa}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}$ sunt diramationis puncta planitiei T; $a + bz$ autem est forma universalis functionum φ et

$$z, \; 1-z, \; 1-\varkappa z, \; 1-\lambda z, \; 1-\mu z$$

sunt eae functionum φ, quarum radices quadratae functiones Abelianae nominantur, cum z, $1-z$ &c. resp. pro $z = 0, 1$ &c. infinite parvae secundi ordinis nominentur.

In dissertatione proxime edenda demonstrabo has functiones exstare pro aequatione universali $F(s, z) = 0$, simulque quot talium functionum debeant quidem exstare.

Producta binarum talium functionum Abelianarum symplegmatis (cf. § I hj. diss.) componi possunt atque inter ea producta theorema in § IV hj. diss. locum habet, scilicet inter quaeque p productorum exstare relationem linearem coefficientium constantium.

Integralia

$$u = \int \frac{\sqrt{\varphi . \psi} \; dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

functionibus w forma quidem similia sunt et porro eo quod pro quoque valore illius z finita permanent; e theoremate autem constituto sequitur, ut per numerum $p-1$ eorum lineariter exprimi possint.

Theorema assimile quod attinet ad illas functiones w Riemannus duplicem demonstrationem dedit. Quarum altera in § quarta eius dissertationis maxime est universalis; ea non inde pendet quod functiones w forma

$$w = \int \frac{\varphi \; dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

repraesentari possunt nititurque in considerationibus de periodicitatis modulis functionum w. Altera demonstratio continetur § IX diss. Riem. atque propterea non pariter universalis est quod de forma planitiei T praemissa requirit, quae in fine § VI diss. Riem. adnotatae sunt.

Etiam theorema adhuc demonstrandum de functionibus $\sqrt{\varphi\psi}$ duplici modo demonstrari potest; primum considerationibus de numero constantium arbitrariarum, quae his

functionibus continentur; hanc demonstrationem ill. Riemannus scholis suis integram dedit. Deinde vero idem theorema in universum demonstrari potest considerationibus § IV diss. Riem. assimilibus, cum principio Dirichletiano, ut Riemannus quidem appellat, formam idoneam reddideris. Hanc formam § II hj. diss. evolvi.

Cum id theorema, ut exemplo in paragrapho V huius libelli dato clare apparet, ad theoriam aequationum algebraicarum permultum valeat, procul dubio optandum est illam demonstrationem sic tradi ut circumscriptiones a Cl. Riemanno in fine paragraphi sextae stipulatae valeantne pro planitie T necne, nullius momenti sit.

Cl. Kronecker, fautor atque amicus summe mihi reverendus, etiam, qua est ingenii sagacitate, docuit illam demonstrationis universalitatem vel alia de caussa esse optandum.

Licet nimirum hoc theoremate algebraicas aequationes in numerum aequationem linearium inter integras radices quadratas commutari atque in ea re positio diramationis punctorum tantummodo simplicium alicuius momenti esse videtur, cum in illis punctis functio algebraica potestatibus radicum quadratorum explicari potest. Ex nostro vero demonstratione ea transformatio fieri potest compositis diramationis punctis positis.

§ I.

Sint $\sqrt{\varphi}$ et $\sqrt{\psi}$ duae functiones Abelianae. In dissertatione proxime edenda demonstrabo radicem $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ functionibus ϑ exprimi posse; cum illae funct. ϑ monodynamicae sint functiones loci in planitie T_1, sequitur, ut etiam $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$, ergo etiam $\sqrt{\varphi\,\psi}$ intra planitiem T_1 monodynamicae sint. Atqui functiones rationales illarum s et z per quotientes duarum functionum ϑ exprimi non possunt, ergo etiam $\sqrt{\varphi\psi}$ non ab utraque parte unius cuiusque sectionis transversalis eosdem valores habere potest, sed necesse est nunquam non una quidem sectio transversalis exstet, quam transgrediens $\sqrt{\varphi\psi}$ statim alios valores accipit.

Ex repraesentatione illarum functionum per funct. ϑ sequitur, ut $\sqrt{\varphi\psi}$ nullam aliam mutationem quam signum mutatum, subire possit.

Ut clarius fiat quae nobis velimus, haec quoque addantur. Sectiones transversales in numero $2p$ exstantes in binas (a) et (b) composuimus, sic ut altera alterius utrumque latus inter se coniungat. Si $\sqrt{\varphi\psi}$ ab utroque latere illius (b) contrarios valores habet, ea functio necesse est altero valore illius $\sqrt{\varphi\psi}$ perpetuo secundum (a) continuato ad alterum valorem perveniat. Id e. g. hoc modo fieri potest.

Si $\sqrt{\varphi\psi}$ intra (a) in aliquo puncto $z = a$ aequalis est $\sqrt{z-a} \times f(s, z)$, ubi $f(s, z)$ monodynamica est pro $z = a$, tum $\sqrt{\varphi\psi}$ in planitie T tantummodo monodynamica permanere potest, si hoc punctum $z = a$ punctum diramationis est. Tum $\sqrt{\varphi\psi}$ ab utroque latere illius (b) contrarios valores habebit.

Hoc integrale

$$u = \int \frac{\sqrt{\varphi\psi}\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

iisdem de causis atque u ubique finitum est, ergo propter discontinuitates in sectionibus transversalibus monodynamice intra T_1 constitui possit necesse est, quoniam $\frac{dw}{dz}$ eandem habet proprietatem.

Si $\underset{+}{u}$ et $\underset{-}{u}$ valores illius u sunt ab utroque latere alicuius sectionis transversalis, tum in sectionibus, quarum ab utroque latere $\sqrt{\varphi\psi}$ eundem $+$ aut $-$ signum habet, erit:

$$\underset{-}{u} = \underset{+}{u} + \text{Const.}$$

In ceteris autem sectionibus transversalibus erit:

$$\underset{-}{u} = -\underset{+}{u} + \text{Const.}$$

Harum sectionum transversalium unam quidem nunquam non certe exstare necesse est. Constantes additivae etiam harum aequationum nominentur periodicitatis moduli.

Iam pervenimus ad definitionem talium functionum, quae ab utroque latere datarum sectionum transversalium contraria signa habent easque constituimus per periodicitatis earum modulos. Neque tamen praesumimus eas functiones formam hanc habere:

$$u = \int \frac{\sqrt{\varphi\psi}\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Revera functiones hancce formam habentes nunquam non speciales casus erunt; functio autem huiusce modi maxime universalis per quotientes duarum functionum ϑ exprimi poterit; eoque existet, quod hisce $p-1$ punctis arbitrariae positiones dantur, in quibus nominator evanescit, numeratore a cifr. 0 differente.

§ II.

Integrale duplex, in quo α functio realis illorum x et y, non illius $x + yi$,

$$(a) \qquad \Omega(\alpha) = \iint \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \right) dT$$

per totam planitiem T, sectionibus transversalibus diremptam extensum, valorem habet finitum, simulatque α, id quod ponimus, usque finitum manet. Quare necesse est $\Omega(\alpha)$ certe minimum habere sic ut, qualiscunque functio σ usque et finita et continua (in T_1) et realis illorum x et y est, dummodo constans h satis parva sit:

$$\Omega(\alpha + h\sigma) > \Omega(\alpha).$$

Quantumcunque autem h est, nunquam non secundum (a) erit.

$$\Omega\,(\alpha + h\sigma) = \Omega\,(\alpha) + h^2\,\Omega\,(\sigma) + 2h\int\!\!\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) dT. \qquad (b)$$

T_1 est planities planum z in sensu Riemanni multipliciter obtegens. Cum plagulae illius T_1 ubique parallelae plano z sint, elementum dT_1 per $dx\ dy$ exprimi posse necesse est, quod x et y duae sunt directiones inter se rectangulares in plano z, vel in planitie conclusa (simpliciter cohaerente) illud planum compensanti.

Si $\Omega\,(\alpha)$ minimum esse debet, extremum membrum illius (b) tollatur necesse est. Partiali eiusdem integratione efficitur:

$$0 = -\int\!\!\int\sigma\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right) dx\ dy + \int\sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,dy - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,dx\right) \qquad (c)$$

Simplex integrale in (c) positive necesse est per totam limitationem illius T extendi; qua ex caussa illo $\frac{\partial\alpha}{\partial y}\,dx$ eo integrale contento signum — praefixi debet.

Ut aequatio (c) locum habeat; necesse est primum, quia illud σ arbitrarium usque est in T, esse:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = 0.$$

igitur α pars realis alicuius functionis illius $(x + yi)$.

Porro necesse est integrale per limitationem extensum evanescat. Universa limitatio binis constat lateribus omnium sectionum transversalium, quae ut segmentum planitiei limitatum nunquam non in eodem limitationis latere sit positum, in directiones oppositas percurruntur. Quam ob rem dx et dy in binis sectionis alicuius transversalis punctis adversum sitis valores habent oppositos, pro una quoque igitur sectionum transversalium integrale positive per unum tantum (quod positivum statuimus) latus extensum

$$\int\left\{\left(\underset{+}{\left(\sigma\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)} - \underset{-}{\left(\sigma\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)}\right) dy - \left(\underset{+}{\left(\sigma\,\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)} - \left(\sigma\,\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right) dx\right\}$$

valor est ex simplici integrale in (c) consequens.

Porro sit pro illis α conditio haec data, ut in nonnullis sectionibus transversalibus:

$$\underset{-}{\alpha} = \underset{+}{\alpha} + \text{Const., unde: } \underset{-}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}} = \underset{+}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}} \qquad (d)$$

et in ceteris

$$\underset{-}{\alpha} = -\underset{+}{\alpha} + \text{Const., unde: } \underset{-}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}} = -\underset{+}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}, \qquad (e)$$

ubi constantes in omnibus sectionibus datos habeant valores.

Omnes functiones, pro quibus etiam ut pro α aequationes (d) et (e) locum habent, in formam $\alpha + h\sigma$ ducimus, ubi h constans, et eas contemplamur functionum $\alpha + h\sigma$, quae $\Omega\,(\alpha + h\sigma)$ minimum faciunt. Tum in sectionibus, pro quibus aeq. (d) locum habet, erit:

$$\underset{-}{(\alpha + h\sigma)} = + \underset{+}{(\alpha + h\sigma)} + \text{Const.},$$

in ceteris sectionibus

$$\underset{-}{(\alpha + h\sigma)} = - \underset{+}{(\alpha + h\sigma)} + \text{Const.};$$

prima conditione pro $h\sigma$ requiritur, ut sit

$$\underset{-}{h\sigma} = \underset{+}{h\sigma},$$

secundo vero:

$$\underset{-}{h\sigma} = - \underset{+}{h\sigma}.$$

Designatis igitur modulis periodicatis functionum α unum quidque simplicium integralium aeq. (c) contentorum, evanescit, cum sit in omnibus sectionibus transversalibus:

$$\underset{-}{\left(\sigma \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)} = \underset{+}{\left(\sigma \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)},\ \underset{-}{\left(\sigma \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)} = \underset{+}{\left(\sigma \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)}.$$

Si partes reales modulorum periodicitatis alicuius functionis $u = \alpha + \beta i$, quae eis contenta est, de quibus in fine § I diximus, dantur, sequitur, ut

$$\Omega\ (\alpha)$$

minimum sit, cum $\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = 0$ propter conditionem ut u sit functio illius $x + yi$, cumque porro simplicia integralia in (c) simulac modulos periodicitatis datos habent valores, sint $= 0$.

Atque etiam si unus tantum eorum esset infinitus, non oporteret

$$\underline{h\sigma} = \pm\, \underline{h\sigma},$$

quare necesse est omnes hos modulos reales datos esse.

Si ponimus etiam alteram quandam functionem exstare $\alpha + \sigma$, sic ut $\Omega\,(\alpha + \sigma)$ et ipsum sit minimum et illi $\alpha + \sigma$, quod sectiones transversales attinet, eaedem competant proprietates atque illi α, tum

$$\Omega\ (\alpha + h\sigma) = \Omega\ (\alpha) + h^2\ \Omega\ (\sigma)$$

minimum esset et pro $h = 0$ et pro $h = 1$; quod quidem fieri tantum potest, si $\Omega\,(\sigma) = 0$, nam $\Omega\ (\alpha) + h^2\ \Omega\ (\sigma)$ illo h variante tantummodo minimum fit pro $h = 0$. Ut sit $\Omega\ (\sigma) = 0$, necesse est $\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,x}$ et $\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,y}$ evanescant in tota planitie T_1 per sectiones dirempta, ergo $\sigma =$ Const. Cum continuas tantummodo functiones constituere nobis propositum sit, differentia

ab hoc valore in hac vel illa linea aut puncto non est admittenda. Verum etiam costitutio functionum quae praeterquam quod in $2p$ sectiones transversales alias quoque discontinuitates habent, iisdem principiis definiri potest.

Omnis functio w, quam et ipsam per $\alpha + \beta i$ designamus, (cf. introductionem), pro qua in omnibus sectionibus aeq. (d) locum habet, datis partibus realibus modulorum periodicitatis, realem partem α habebit ad unam usque (realem) constantem definitam; etenim est:

$$\underset{-}{\alpha} = \underset{+}{\alpha} + \text{Const.}$$

neque valor ejus constantis mutatur si $\underset{-}{w}$ et $\underset{+}{w}$ in $\underset{-}{w} + a$ atque $\underset{+}{w} + a$ transeunt, ubi a est constans.

Longe aliter vero sese habent functiones α pro qua aeq. (d) et (e) valent. In una certe sectione transversali secundum praemissa est:

$$\underset{-}{\alpha} = -\underset{+}{\alpha} + \text{Const.}$$

Si hoc loco $\underset{-}{\alpha}$ et $\underset{+}{\alpha}$ in $\underset{-}{\alpha} + a$ et $\underset{+}{\alpha} + a$ mutantur, Const. transit in Const. $+ 2a$:

$$\underset{-}{\alpha} + a = -(\underset{+}{\alpha} + a) + \text{Const.} + 2a.$$

Constans realis additiva quae illo α continetur, necesse est $= 0$, si omnes periodicitatis moduli illius α dati sunt.

Pars realis functionis w datis partibus realibus periodicitatis modulorum ad unam usque constantem, pars realis vero functionis u per eandem conditionem complete definita est.

Cum $u = \alpha + \beta i$ functio sit illius $x + yi$ sequitur ut sit:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x},$$

ergo

$$\beta = \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\, dy - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\, dx \right) + \text{Const.}$$

Iis quae supra diximus comprehensis jam hoc habemus theorema:

Functiones u designatione partium realium suorum periodicitis modulorum ad unam usque constantem additivam mere imaginariam constitutae sunt.

§ III.

Constans aliqua $C = A + Bi$ considerari potest tanquam casus specialis illorum u quandoquidem aut $\underset{-}{A} = \underset{+}{A} + 0$, aut $\underset{-}{A} = -\underset{+}{A} + 2A$ consideratur.

Qua re functio illius $(x + yi)$, quae in aliis sectionibus transversalibus eam habet proprietatem, ut pars realis f

*

$$\underset{-}{f} = \underset{+}{f},$$

in aliis eam, ut

$$\underset{-}{f} = - \underset{+}{f} + 2A,$$

ubi A pro quoque harum posteriorum sectionum transversalium eundem valorem habet, idem est atque illud $A + Bi$, ubi B est arbitrarium.

Nominatim functio aliqua (monodynamica in T_1), pro qua $A = 0$, quae igitur in nonnullis sectionibus transversalibus in valorem negativum transiens in omnibus sectionibus periodicitatis modulos mere imaginarios tantummodo habet, necessario constans est mere imaginaria.

Duo haec theoremata sufficient ad demonstrationem propositam in universum tradendam.

§ IV.

Sint $\sqrt{\varphi_1 \psi_1} \ldots \sqrt{\varphi_p \psi_p}$ producta functionum Abelianarum (cf. § 1), quae ab utroque sectionum transversalium latere valores habent communiter oppositos aut aequales. Tum binarum earum $\sqrt{\varphi_\mu \psi_\mu}$ producta in omnibus sectionibus transversalibus utrimque aequalia erunt, ergo rationaliter per s et z exprimi poterunt.

Sint:

$$u_1 = \int \frac{\sqrt{\varphi_1 \psi_1}}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz, \ldots . u_p = \int \frac{\sqrt{\varphi_p \psi_p}}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz.$$

Nominamus producta $\sqrt{\varphi_1 \psi_1} \ldots \sqrt{\varphi_p \psi_p}$ „ad idem symplegma pertinentia."

Functiones $u_1 \ldots u_p$ sint datae earumque moduli periodicitatis in μ^{sima} sectione transversali, resp.

$$\alpha_1^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} i, \ldots . . \alpha_p^{(\mu)} + \beta_p^{(\mu)} i.$$

Linearis conjunctio:

$$u = (a_1 + b_1 i)\, u_1 + \ldots . + (a_p + b_p i)\, u_p$$

certo erit functio illorum $u_1 \ldots u_p$ similis; ea in sectionibus transversalibus transgrediendis, periodicitatis modulis omissis, una cum illis $u_1 \ldots u_p$ aut in contrarium transit aut signum suum (+ vel —) retinet; porro u ubique finitum est, simulatque illa a et b finita sunt ideoque functio u designatis partibus realibus suorum periodicitatis modulorum ad unam usque imaginariam constantem constituta est. Si $\alpha^{(\mu)} + \beta^{(\mu)} i$ periodicitatis modulus illius u est in μ^{sima} sectione transversali, habebimus hoc:

$$\alpha^{(\mu)} = a_1 \alpha_1^{(\mu)} + \ldots + a_p \alpha_p^{(\mu)} - (b_1 \beta_1^{(\mu)} + \ldots + b_p \beta_p^{(\mu)}),$$

itaque $2p$ lineares aequationes ad constituendas $2p$ quantitates a et b.

Designavimus hos duas casus, ubi

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^1, \ldots & \alpha^1_p, & \beta_1^1, \ldots & \beta^1_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{(2p)}, \ldots & \alpha_p^{(2p)}, & \beta_1^{(2p)}, \ldots & \beta_p^{(2p)} \end{vmatrix}$$

aut differt a cifr. 0 aut est aeq. 0.

In primo casu licet omnia $\alpha^{(\mu)}$ aequiparari eodem $2A$, quae sunt periodicitatis moduli in sectionibus transversalibus, in quibus transgrediendis illa $\sqrt{\varphi\psi}$ in $-\sqrt{\varphi\psi}$ transeunt. Tum illa $a_1 \ldots a_p$, $b_1 \ldots b_p$ tanquam finita possunt constitui; efficitur igitur lineari conjunctione illorum $u_1 \ldots u_p$, quae secundum § IV constans $= A + Bi$ sit necesse est:

$$(a_1 + b_1 i)\, u_1 + \ldots + (a_p + b_p i)\, u_p = A + Bi.$$

Si est determinans $D = 0$, relationes quantitatum realium a et b sic possunt constitui ut omnia $\alpha^{(\mu)} = 0$ reddantur.

Tum

$$u = (a_1 + b_1 i)\, u_1 + \ldots + (a_p + b_p i)\, u_p = Bi,$$

mere imaginaria constans est; differentiatione harum aequationum in utroque casu efficitur ut:

$$(a_1 + b_1 i) \sqrt{\varphi_1 \psi_1} + \ldots + (a_p + b_p i) \sqrt{\varphi_p \psi_p} = 0.$$

Quod est theorema demonstrandum:

Inter quaeque p producta ad idem symplegma pertinentia duarum functionum Abelianarum aequatio linearis, cujus coefficientes sunt constantes, locum habet.

Intelligimus, in lineari conjunctione

$$(a_1 + b_1 i)\, u_1 + \ldots + (a_\mu + b_\mu i) + u_\mu,$$

$\mu < p$, omnes modulos periodicitatis (id est eorum reales partes) arbitrarias constitui non posse. Unde sequitur, inter μ functiones u aequationem linearem generaliter non exstare.

§ V.

Pro $p = 1$ prorsus nullae exstant functiones Abelianae hoc quidem nostro sensu.

Pro $p = 2$ exstant 16 diversae characteristicae tales, quales in Borchardtii diario propediem notabuntur, quarum una $\binom{0\ 0}{0\ 0}$ quandoquidem functionibus rationalibus respondet, nulli symplegmati respondere potest ita quidem, ut 15 symplegmata restent. Exstat autem pro $p = 2$ numerus 6 functionum Abelianarum, siquidem $a_1 \ldots a_6$ puncta sunt diramationis: $\sqrt{z - a_1} \ldots \sqrt{z - a_6}$, quae bina conjuncta in numero 15 exstant. Pro unaquoque igitur symplegmate unum solum exstat productum binarum functionum Abelianarum, theorema itaque supra explicatum hoc quidem loco nullius est momenti.

Verum tamen est momenti pro $p > 2$.

Sint e. g. pro $p = 3$: $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$, $\sqrt{z\xi}$ tria producta functionum Abelianarum ad idem symplegma pertinentia. Valores constantium nihil valentes sic possunt cogitari constituti, ut aequatio linearis hanc accipiat formam:

$$(1) \qquad \sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\xi} = 0,$$

vel

$$(2) \qquad (x\xi - y\eta - z\zeta)^2 = 4y\eta z\zeta$$

h. e. ea aequatio, in quam $F(s, z) = 0$, ubicunque $p = 3$ est, transformari potest, quod vero sequente facillime sequitur.

In ea re ξ, η, ζ per x, y, z exprimantur:

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = ax + by + cz, \\ \eta = a_1x + b_1y + c_1z, \\ \zeta = a_2x + b_2y + c_2z. \end{cases}$$

Si scripseris aequationem (1) hoc modo:

$$\sqrt{\alpha x \frac{\xi}{\alpha}} + \sqrt{\beta y \frac{\eta}{\beta}} + \sqrt{\gamma z \frac{\zeta}{\gamma}} = 0$$

porro

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{a \,.\, \alpha x}{\alpha^2} + \frac{b \,.\, \beta y}{\alpha\beta} + \frac{c \,.\, \gamma z}{\alpha\gamma},$$

$$\frac{\eta}{\beta} = \frac{a_1 \,.\, \alpha x}{\alpha\beta} + \frac{b_1 \,.\, \beta y}{\beta^2} + \frac{c_1 \,.\, \gamma z}{\beta\gamma},$$

$$\frac{\zeta}{\gamma} = \frac{a_2 \,.\, \alpha x}{\alpha\gamma} + \frac{b_2 \,.\, \beta y}{\beta\gamma} + \frac{c_2 \,.\, \gamma z}{\gamma^2},$$

cognosces hanc aequationem algebraicam tantum sex constantes aliquid valentes continere, nimirum modulos classis functionum aequidiramatarum. Quem ad finem modo significes $\alpha x, \beta y, \gamma z, \frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}, \frac{\zeta}{\gamma}$ per $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ atque, valoribus illorum α, β, γ arbitrio assumtis, tribus illorum $a, b \,..\, c_2$ des certos valores, e. g. si $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, $\gamma^2 = c$ redduntur, tribus ultimis aequationibus sex tantum constantes continentur. Si in aeq. (2) quantitates x, y, z per s et z expresseris, accipies aeq. supra per $F(s, z) = 0$ designatam; attamen haec aequatio plane per aeq. (2) compensatur.

Si $p > 3$, plures aequationes (in numero $p - 2$) hujus formae:

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \ldots + \sqrt{x_p\xi_p} = 0$$

requiruntur quibus aequ. $F(s, z) = 0$ recompensetur. Modulorum vere numerus ac quantitas non aeque facile inveniri possunt. Qua de re ill. Riemannus in lectionibus suis egit.

THESES.

1. Nihil interest, axiomata et postulata matheseos metaphysice construi.
2. Actio in distans perscrutatione rerum naturalium exacta satis comprobatur.
3. Finis disciplinae metaphysicae situs est in categoriis constituendis.
